Une image contenant texte, capture d’écran, Police, graphisme

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

## Résumé exécutif

Ce projet vise à construire un pipeline complet de pricing d’options européennes en comparant deux approches complémentaires : le modèle analytique de Black–Scholes et la simulation numérique Monte Carlo sous hypothèse de mouvement brownien géométrique (GBM).  
L’objectif principal est d’évaluer la précision, la convergence et la robustesse du pricer Monte Carlo par rapport à la référence théorique Black–Scholes, tout en étudiant le comportement des Greeks (Δ, ν, Θ) qui mesurent les sensibilités du prix de l’option.  
Les résultats montrent une convergence conforme à la loi en 1/√N, confirmant la validité du modèle Monte Carlo pour un nombre suffisant de simulations. L’analyse met en évidence une hausse de l’erreur relative lorsque la volatilité ou la maturité augmente, ainsi qu’une forte dépendance au moneyness.  
Les Greeks présentent des comportements cohérents : Delta croît avec le sous-jacent, Vega atteint un maximum à l’ATM, et Theta diminue avec le temps.  
Enfin, le projet souligne les limites du modèle (volatilité constante, absence de sauts) et ouvre des pistes d’amélioration telles que les techniques de réduction de variance ou l’intégration d’une volatilité stochastique (Heston) pour des simulations plus réalistes.

Table des matières

[Résumé exécutif 2](#_Toc211513421)

[I. Introduction 3](#_Toc211513422)

[II. Cadre théorique 3](#_Toc211513423)

[1) Modèle sous-jacent (GBM) 3](#_Toc211513424)

[2) Formules de Black–Scholes 4](#_Toc211513425)

[3) Les Greeks 5](#_Toc211513426)

[4) Hypothèses et limites du modèle 5](#_Toc211513427)

[III. Méthodologie 6](#_Toc211513428)

[1) Spécification fonctionnelle 6](#_Toc211513429)

[2) Implémentations 6](#_Toc211513430)

[3) Design expérimental 7](#_Toc211513431)

[IV. Résultats, convergences et précisions 8](#_Toc211513432)

[1) Convergence du pricer Monte Carlo vers Black–Scholes 8](#_Toc211513433)

[2) Sensibilité à la volatilité (σ) et à la maturité (T) 8](#_Toc211513434)

[3) Effet du moneyness (K/S₀ = 0.8, 1.0, 1.2) 9](#_Toc211513435)

[4) Synthèse et interprétation 9](#_Toc211513436)

[V. Résultats — Greeks 10](#_Toc211513437)

[1) Delta (Δ) en fonction du sous-jacent 10](#_Toc211513438)

[2) Vega (ν) en fonction de la volatilité 11](#_Toc211513439)

[3) Theta (Θ) en fonction du temps 11](#_Toc211513440)

[4) Lecture pratique et interprétation globale 11](#_Toc211513441)

[VI. Validation, robustesse et performance 12](#_Toc211513442)

[1) Tests analytiques 12](#_Toc211513443)

[2) Tests numériques 13](#_Toc211513444)

[VII. Discussion 14](#_Toc211513445)

[VIII. Conclusion 15](#_Toc211513446)

[Références 16](#_Toc211513447)

# Introduction

Le pricing d’options européennes constitue un enjeu central en finance quantitative, car il permet d’estimer la valeur théorique d’un contrat dérivé en fonction de différents paramètres de marché. Le modèle de Black–Scholes, proposé en 1973, offre une solution analytique élégante reposant sur des hypothèses de marché idéalisées : volatilité constante, absence de frictions et dynamique du sous-jacent suivant un mouvement brownien géométrique. Bien que largement utilisé, ce modèle présente des limites dès que les conditions de marché s’éloignent de ces hypothèses, notamment en présence de volatilité variable ou de comportements non linéaires.

À côté de cette approche analytique, la méthode de Monte Carlo offre une alternative numérique plus flexible. Elle consiste à simuler un grand nombre de trajectoires du sous-jacent selon sa dynamique stochastique, puis à estimer le prix de l’option par la moyenne actualisée des payoffs simulés. Cette méthode, bien que plus coûteuse en temps de calcul, permet de traiter des structures de produits ou des conditions de marché que les modèles fermés ne peuvent pas facilement modéliser.

Le principal défi de ce projet réside donc dans le compromis entre précision et efficacité : comprendre jusqu’à quel point la méthode de Monte Carlo peut reproduire les résultats analytiques de Black–Scholes, et à quel coût computationnel. Il s’agit également d’analyser comment la variance de l’estimateur décroît avec le nombre de simulations et comment les paramètres de volatilité et de maturité influencent la stabilité du modèle.

Les objectifs du travail sont triples. D’abord, comparer quantitativement les deux pricers – analytique et numérique afin d’évaluer leurs écarts dans différents scénarios de marché. Ensuite, étudier la convergence et la variance du pricer Monte Carlo en fonction du nombre de simulations. Enfin, illustrer les comportements des principaux Greeks (Delta, Vega et Theta), qui mesurent la sensibilité du prix de l’option aux variations du sous-jacent, de la volatilité et du temps.

Ce projet s’appuie sur un protocole expérimental reproductible, fondé sur des grilles de paramètres couvrant plusieurs niveaux de volatilité, de maturité et de moneyness. Les figures produites permettent de visualiser les tendances clés et d’appuyer les conclusions quantitatives, tandis qu’une checklist de validation garantit la cohérence et la qualité des résultats obtenus.

# Cadre théorique

## Modèle sous-jacent (GBM)

Le prix d’un actif financier est souvent modélisé comme un mouvement brownien géométrique (GBM), qui suppose que les rendements logarithmiques sont normalement distribués et indépendants dans le temps. Cette hypothèse conduit à la dynamique suivante :

Une image contenant Police, texte, typographie, calligraphie

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

où est le prix du sous-jacent à l’instant , représente le rendement espéré, la volatilité, et un mouvement brownien standard. Sous la mesure réelle, reflète le taux de croissance moyen de l’actif.

Pour évaluer une option dans un cadre sans arbitrage, on se place sous la mesure risque-neutre, dans laquelle le rendement espéré de l’actif devient le taux sans risque . L’équation devient alors :

Une image contenant Police, texte, typographie, calligraphie

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

où désigne un mouvement brownien sous la mesure risque-neutre. Cette transformation garantit que la valorisation des dérivés repose uniquement sur les paramètres observables du marché, et non sur les préférences des investisseurs.

## Formules de Black–Scholes

À partir de la dynamique précédente, le modèle de Black–Scholes fournit une solution analytique pour le prix d’un call ou d’un put européen, c’est-à-dire exerçable uniquement à maturité .

Les formules sont :

Avec

Une image contenant Police, texte, blanc, ligne

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

où est la fonction de répartition de la loi normale standard. Ces expressions représentent la valeur espérée actualisée des gains futurs sous la mesure risque-neutre.

Le modèle repose sur l’idée que les prix suivent une distribution log-normale, et qu’un portefeuille correctement répliqué permet d’éliminer le risque de manière continue, d’où la possibilité d’obtenir une formule fermée.

## Les Greeks

Les Greeks sont des dérivées partielles du prix de l’option par rapport à ses variables principales. Ils mesurent la sensibilité du prix aux changements du sous-jacent, de la volatilité ou du temps, et sont essentiels à la gestion des risques.

* Delta (Δ) : sensibilité du prix de l’option à une variation du sous-jacent (Delta traduit la proportion du sous-jacent nécessaire pour couvrir la position optionnelle) :

Une image contenant Police, écriture manuscrite, calligraphie, typographie

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

* Vega (ν) : sensibilité du prix de l’option à une variation de la volatilité (où est la densité de la loi normale standard. Vega est maximal lorsque l’option est à la monnaie (ATM) :

Une image contenant Police, blanc, texte, calligraphie

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

* Theta (Θ) : mesure de la dépréciation du prix de l’option avec le temps, appelée “valeur temps”, (Le Theta est généralement négatif : la valeur de l’option diminue à mesure que l’échéance approche) :

Une image contenant texte, Police, blanc, écriture manuscrite

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Sur le plan économique, ces indicateurs permettent de comprendre les principaux leviers du prix : Delta exprime la dépendance au sous-jacent, Vega à la volatilité, et Theta au passage du temps. Ensemble, ils constituent la base de la gestion dynamique de portefeuille (hedging).

## Hypothèses et limites du modèle

Le modèle de Black–Scholes repose sur un ensemble d’hypothèses simplificatrices :

* La volatilité σ et le taux sans risque r sont constants dans le temps ;
* Les marchés sont parfaits, sans coûts de transaction ni restrictions de liquidité ;
* Il est possible de répliquer un portefeuille en continu ;
* Les prix suivent une dynamique continue sans sauts ;
* Aucun dividende n’est versé pendant la durée de vie de l’option.

En pratique, ces conditions sont rarement satisfaites. Les marchés présentent des discontinuités, les volatilités sont stochastiques et les comportements extrêmes entraînent des déviations notables entre le modèle théorique et les observations empiriques. Ces écarts expliquent l’apparition du smile de volatilité, phénomène bien connu en finance de marché.

# Méthodologie

## Spécification fonctionnelle

Avant toute implémentation, une phase de spécification a été réalisée afin de définir précisément la structure, les paramètres d’entrée et les sorties attendues de chaque fonction. Deux pricers ont été conçus : un pricer analytique Black–Scholes et un pricer Monte Carlo.

La fonction black\_scholes\_price(S, K, T, r, sigma, option\_type) calcule le prix théorique d’un call ou d’un put européen selon les formules dérivées du modèle de Black–Scholes. Les entrées sont : le prix initial du sous-jacent , le prix d’exercice , la maturité en années, le taux sans risque , la volatilité , et le type d’option (“call” ou “put”). La fonction retourne le prix de l’option et vérifie la validité des paramètres.

La fonction mc\_option\_price(S, K, T, r, sigma, option\_type, n\_sims, rng\_seed=None, return\_std=False) implémente le pricer Monte Carlo. Elle simule trajectoires du sous-jacent sous la mesure risque-neutre, calcule le payoff de l’option à maturité, puis en déduit la valeur actualisée moyenne. Si *return\_std* est activé, elle retourne également l’écart-type de l’estimation.

Les domaines valides sont strictement définis : . Des messages d’erreur explicites sont prévus pour les entrées invalides, par exemple si ou . Ces cas limites sont traités analytiquement :

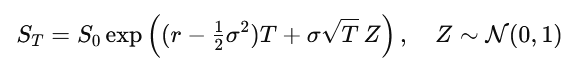
* si , le prix de l’option correspond à son payoff immédiat pour un call ou pour un put ;
* si , la trajectoire devient déterministe et le prix dépend uniquement de l’actualisation du payoff certain ;
* pour des cas très ITM ou OTM, la fonction gère numériquement les extrêmes de et pour éviter les erreurs de dépassement.

Cette phase de spécification garantit la robustesse du code et sa cohérence pour toutes les combinaisons de paramètres testées.

## Implémentations

L’implémentation repose sur une structure simple et modulaire. Le pricer Black–Scholes est calculé de manière directe à partir des formules analytiques. Une vérification des termes intermédiaires et a été intégrée, ainsi qu’une validation des valeurs de et via la fonction de répartition de la loi normale standard.

Pour le pricer Monte Carlo, la simulation repose sur la dynamique risque-neutre :



Chaque trajectoire génère un prix final , à partir duquel on calcule le payoff selon le type d’option :



Ces payoffs sont ensuite actualisés à la date initiale à l’aide du facteur , puis moyennés pour obtenir le prix estimé.

Afin d’évaluer la qualité de l’estimation, la méthode calcule également l’erreur-type de l’échantillon et un intervalle de confiance à 95 % (IC95) selon :

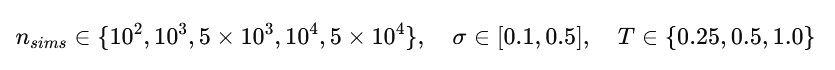
Une image contenant texte, Police, blanc, ligne

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Une graine aléatoire (*rng\_seed*) peut être spécifiée pour assurer la reproductibilité des résultats. L’ensemble du calcul est vectorisé à l’aide de NumPy afin de réduire le temps d’exécution.

## Design expérimental

L’expérimentation a pour but d’évaluer la précision et la stabilité du pricer Monte Carlo en le comparant au pricer analytique Black–Scholes. Plusieurs séries de simulations sont réalisées selon des grilles de paramètres systématiques :



Pour chaque configuration, trois niveaux de moneyness sont étudiés :

* ITM (in the money) :
* ATM (at the money) :
* OTM (out of the money) :

Les métriques calculées incluent :

* l’erreur absolue ,
* l’erreur relative ,
* le biais moyen,
* l’intervalle de confiance à 95 %,
* et le temps d’exécution de chaque simulation.

Les résultats sont enregistrés sous forme de tableaux et serviront de base aux visualisations des sections suivantes (convergence, sensibilité à σ et T, effet du moneyness).

Ce protocole expérimental assure une comparaison rigoureuse entre les deux méthodes, tout en permettant d’étudier la relation entre précision statistique, complexité numérique et paramètres de marché. Aucun graphique n’est encore généré à ce stade : cette section décrit uniquement le cadre méthodologique et les choix expérimentaux avant l’analyse des résultats.

# Résultats, convergences et précisions

## Convergence du pricer Monte Carlo vers Black–Scholes

L’un des premiers objectifs de cette étude est de vérifier la convergence du pricer Monte Carlo vers le prix théorique obtenu par la formule de Black–Scholes lorsque le nombre de simulations augmente.  
Pour ce faire, le prix Monte Carlo a été calculé pour différentes tailles d’échantillons, allant de à simulations, tout en conservant les mêmes paramètres de base (, , , , ).

Les résultats montrent une stabilisation progressive du prix simulé autour de la valeur analytique, confirmant la validité du modèle. La courbe prix\_MC vs N (Figure 1) illustre cette convergence : lorsque le nombre de trajectoires croît, la dispersion des estimations diminue et la moyenne se rapproche de celle de Black–Scholes.

Une image contenant texte, ligne, capture d’écran, Tracé

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Figure 1 : Convergence du prix Monte Carlo vers Black–Scholes (prix\_MC vs N, échelle log)

De manière quantitative, l’évolution de l’erreur relative | Pmc – Pbs | / Pbs suit une décroissance proportionnelle à , comme le prédit la théorie statistique. En traçant l’erreur en échelle log–log (Figure 2), la pente observée avoisine -0.5, indiquant que la variance de l’estimation décroît selon la loi des grands nombres. Cette observation confirme que la précision du Monte Carlo dépend principalement du nombre de simulations, indépendamment de la structure de l’option.

Une image contenant texte, ligne, capture d’écran, Tracé

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Figure 2 : Erreur relative vs nombre de simulations (log–log)

Ces premiers résultats valident la cohérence de l’implémentation et montrent qu’un nombre suffisant de simulations permet de reproduire fidèlement le prix analytique, au prix d’un temps de calcul plus important.

## Sensibilité à la volatilité (σ) et à la maturité (T)

Au-delà de la convergence en fonction du nombre de simulations, il est essentiel d’analyser la sensibilité du pricer Monte Carlo à deux paramètres clés : la volatilité et la maturité.  
Ces deux facteurs influencent directement la dispersion des trajectoires simulées et donc la variance de l’estimation.

Pour cette étude, plusieurs combinaisons de et ont été testées, en conservant et (cas ATM).  
Les résultats sont représentés sous forme de heatmaps :

* La première (Figure 3) montre la distribution des erreurs relatives ;
* La seconde (Figure 4) illustre les intervalles de confiance à 95 % (IC95).

Une image contenant texte, capture d’écran, ligne, Police

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Figure 3 : Heatmap σ×T des erreurs relatives (ATM)

Une image contenant texte, capture d’écran, nombre, Police

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Figure 4 : Largeur de l’IC95 Monte Carlo (σ×T, ATM)

On observe que les erreurs augmentent lorsque la volatilité et la maturité sont élevées. Ce comportement s’explique par une plus grande dispersion des prix simulés : une volatilité plus forte accroît la variance des trajectoires, tandis qu’une maturité longue amplifie l’effet cumulé du bruit aléatoire. Ces zones correspondent donc à des régions “difficiles” pour le Monte Carlo, nécessitant davantage de simulations pour atteindre une précision donnée.

**La Figure F4** présente la heatmap des largeurs d’intervalles de confiance à 95 % (IC95) du pricer Monte Carlo pour différentes combinaisons de volatilité σ et de maturité T, en situation ATM.  
On observe une augmentation quasi-linéaire de la largeur de l’IC95 lorsque σ et T croissent. Cette tendance s’explique par la dispersion accrue des trajectoires simulées : une volatilité plus forte amplifie la variance instantanée du processus, tandis qu’une maturité plus longue accumule l’incertitude dans le temps.  
Les zones à volatilité élevée (σ ≥ 0.4) et maturité longue (T ≥ 1) affichent donc les IC95 les plus larges, traduisant une précision moindre du Monte Carlo pour un même nombre de simulations N.

Inversement, pour des maturités courtes et une volatilité faible, la méthode Monte Carlo converge rapidement vers le prix théorique, avec des intervalles de confiance étroits et une erreur moyenne inférieure à quelques dixièmes de pourcent.

## Effet du moneyness (K/S₀ = 0.8, 1.0, 1.2)

Afin d’évaluer la robustesse du pricer, une comparaison a été effectuée entre trois configurations de moneyness : ITM (K = 0.8 S₀), ATM (K = S₀) et OTM (K = 1.2 S₀).  
Cette analyse permet de mesurer comment la position relative du prix d’exercice influence la précision et le biais du pricer Monte Carlo.

Les résultats (Figure 5) montrent que les erreurs sont généralement plus faibles pour les options à la monnaie (ATM), car leur payoff moyen est plus équilibré et moins dominé par des événements rares.

Une image contenant texte, capture d’écran, diagramme, ligne

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Figure 5 : Effet du moneyness sur la précision du pricer Monte Carlo.

Les résultats confirment que les erreurs sont minimales pour les options à la monnaie (ATM), tandis qu’elles augmentent sensiblement pour les options hors de la monnaie (OTM).  
Ce phénomène s’explique par la structure du payoff : lorsque l’option est profondément ITM ou OTM, les valeurs simulées deviennent plus dispersées et la variance du Monte Carlo augmente.  
Le cas ATM, plus équilibré entre gains et pertes potentiels, fournit donc la meilleure stabilité statistique.  
Les options in the money (ITM) présentent des prix plus stables mais des erreurs relatives légèrement supérieures, car leur valeur absolue est plus élevée.  
Enfin, les options out of the money (OTM) sont les plus sensibles au bruit de simulation : leur payoff, souvent nul, amplifie les variations relatives, ce qui se traduit par un biais plus marqué.

Cette sensibilité se retrouve dans les intervalles de confiance, plus larges pour les options éloignées de la monnaie.

## Synthèse et interprétation

L’ensemble des résultats obtenus met clairement en évidence la relation directe entre le nombre de simulations et la précision du pricer Monte Carlo.  
La convergence vers la valeur analytique de Black–Scholes s’observe dès quelques milliers de trajectoires, et la loi empirique en se vérifie avec une grande cohérence.

En pratique, un nombre d’environ simulations s’avère suffisant pour obtenir une erreur moyenne inférieure à 1 % dans la majorité des configurations standards, notamment pour des maturités inférieures à un an et des volatilités modérées (). Cette zone correspond à un compromis satisfaisant entre précision et temps de calcul, assurant la reproductibilité des résultats tout en maintenant un coût de simulation raisonnable.

En revanche, lorsque la volatilité ou la maturité augmentent, la variance du payoff simulé croît significativement, ce qui se traduit par une plus grande dispersion des estimations et des intervalles de confiance plus larges. Ces situations exigent un nombre de trajectoires bien plus élevé pour atteindre un même niveau de précision, et rendent la méthode Monte Carlo computationalement coûteuse.

Ces observations soulignent les limites intrinsèques de la méthode : la précision dépend exclusivement du volume de simulations et non de la structure du modèle. Pour pallier ce problème, plusieurs approches d’amélioration sont envisageables, notamment les techniques de réduction de variance (antithetic variates, stratified sampling, quasi-Monte Carlo avec séquences de Sobol) ou encore l’utilisation de modèles plus avancés intégrant une volatilité stochastique, comme celui de Heston.

Cette synthèse sert de conclusion naturelle au chapitre des résultats et prépare la transition vers la partie suivante consacrée à la validation et la robustesse des pricers.

# Résultats — Greeks

## Delta (Δ) en fonction du sous-jacent

Le Delta (Δ) mesure la sensibilité du prix de l’option à une variation du prix du sous-jacent. Pour une option call, il représente l’augmentation attendue du prix de l’option pour une hausse unitaire du sous-jacent. Pour un put, le Delta est négatif et traduit la baisse de valeur de l’option lorsque le sous-jacent augmente.

Les courbes obtenues (Figure 6) montrent une évolution monotone du Delta en fonction du prix du sous-jacent .

* Pour les calls, Δ croît de 0 à 1 lorsque l’option passe de très OTM à très ITM.
* Pour les puts, Δ décroît de 0 à −1 selon le même schéma, illustrant une symétrie parfaite entre les deux types d’options.

Une image contenant texte, ligne, Tracé, diagramme

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Figure 6 : Δ(S) courbe call/put

Autour de la monnaie (), la pente de la courbe est la plus forte, traduisant une sensibilité maximale à de petites variations du sous-jacent. Ce comportement justifie l’importance de la couverture dynamique : plus une option est proche de la monnaie, plus il faut ajuster fréquemment la position sur le sous-jacent pour maintenir un portefeuille neutre en Delta.

## Vega (ν) en fonction de la volatilité

Le Vega (ν) quantifie la sensibilité du prix de l’option à une variation de la volatilité du sous-jacent.  
Il exprime combien le prix de l’option augmente si la volatilité monte d’un point de pourcentage.

La courbe représentée sur la (Figure 7) présente une forme en cloche, caractéristique du comportement du Vega. La valeur maximale se situe lorsque l’option est à la monnaie (ATM), car dans ce cas, la probabilité d’exercice est la plus incertaine. Les options ITM ou OTM, dont les résultats futurs sont plus prévisibles, présentent un Vega plus faible.

Une image contenant texte, ligne, Tracé, diagramme

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Figure 7 : ν(σ) courbe du Vega

Ce comportement traduit un principe essentiel : plus l’incertitude du marché est grande, plus l’option devient précieuse. L’impact d’une variation de la volatilité est donc d’autant plus marqué que la position initiale est équilibrée entre gain et perte potentiels.

## Theta (Θ) en fonction du temps

Le Theta (Θ) représente la variation du prix de l’option en fonction du passage du temps. Il mesure la valeur temps de l’option, c’est-à-dire la part du prix liée à la possibilité d’un événement futur favorable.

Les courbes de la (Figure 8) montrent que Θ est négatif pour la plupart des options, traduisant la perte de valeur qui survient à mesure que la maturité approche. Pour les calls comme pour les puts, cette dépréciation s’accélère fortement à l’approche de l’échéance, surtout lorsque l’option est proche de la monnaie.

Une image contenant texte, ligne, Tracé, diagramme

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Figure 8 : Θ(T) courbes Theta (call/put)

Pour les options très ITM ou OTM, le Theta est plus faible : la probabilité de gain ou de perte étant déjà presque certaine, la valeur temps devient négligeable. Cette évolution illustre un aspect pratique du trading d’options : conserver une position longue sur une option proche de l’échéance engendre une perte de valeur rapide, même si le sous-jacent reste stable.

## Lecture pratique et interprétation globale

Les trois Greeks principaux (Δ, ν, Θ) constituent les piliers de la gestion du risque d’un portefeuille d’options.  
Leur interprétation conjointe permet de comprendre comment le prix réagit à différents facteurs de marché :

* Une hausse du sous-jacent accroît la valeur du call (Δ positif) et réduit celle du put (Δ négatif).
* Une hausse de la volatilité augmente toujours la valeur des options, qu’elles soient déjà détenues ou non, car une volatilité plus forte signifie davantage de scénarios de gains potentiels (Vega positif).
* Le temps agit dans le sens inverse : à mesure que l’échéance approche, la probabilité d’un retournement favorable diminue et la valeur temps s’érode (Theta négatif).

Autour de la monnaie, ces trois effets sont les plus marqués : Delta varie rapidement, Vega atteint son maximum, et Theta diminue fortement. Ces comportements expliquent pourquoi les traders surveillent de près les variations de volatilité implicite et la proximité à l’échéance.

Ainsi, l’étude des Greeks permet non seulement de valider la cohérence du modèle de Black–Scholes, mais aussi d’en tirer des enseignements pratiques sur la couverture et la dynamique de la valeur d’une option dans le temps.

# Validation, robustesse et performance

## Tests analytiques

Afin de garantir la fiabilité du pipeline de pricing, plusieurs tests analytiques de cohérence ont été effectués sur les deux pricers. Ces vérifications permettent de s’assurer que les résultats respectent les relations théoriques fondamentales issues du modèle de Black–Scholes.

Le premier test concerne la parité put–call, une identité essentielle qui relie le prix d’un call et celui d’un put de mêmes paramètres :

Cette relation doit être vérifiée quelle que soit la combinaison de volatilité, de maturité ou de moneyness. Les résultats montrent que les valeurs calculées par les deux pricers (analytique et Monte Carlo) respectent cette égalité à un écart numérique négligeable, confirmant la cohérence du modèle de simulation.

Les cas limites ont également été testés :

* Pour T = 0, le prix de l’option correspond exactement à son payoff immédiat : pour le call et pour le put.
* Pour σ = 0, la dynamique devient déterministe. Le prix de l’option correspond alors à la valeur actualisée d’un gain certain, .

Ces résultats ont été confirmés empiriquement, démontrant la stabilité du modèle même dans les situations extrêmes.

Enfin, des bornes théoriques ont été vérifiées :

Les prix simulés se situent systématiquement à l’intérieur de ces intervalles, assurant que les deux pricers ne produisent ni valeurs négatives ni incohérences économiques.

## Tests numériques

La validation numérique s’est concentrée sur la stabilité et la robustesse de l’estimation Monte Carlo.  
Deux axes ont été explorés : la décroissance de l’erreur-type en fonction du nombre de simulations, et la sensibilité des résultats à la graine aléatoire utilisée.

La Figure correspondante (Figure 9) montre une décroissance de l’erreur-type conforme à la théorie statistique, suivant une loi en . En échelle log–log, la pente observée avoisine -0,5, confirmant que l’erreur diminue de moitié chaque fois que le nombre de simulations est multiplié par quatre. Cette relation est un indicateur clé de la convergence correcte du pricer.

Une image contenant ligne, texte, Tracé, diagramme

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Figure 9 : Décroissance de l’erreur-type ~ 1/√N

Pour évaluer la robustesse au hasard des tirages, plusieurs simulations ont été répétées avec des graines différentes (par exemple 42, 123, 999). Les variations des prix obtenus sont restées faibles, de l’ordre de 0,1 à 0,3 % selon les paramètres, indiquant une très bonne stabilité du modèle. L’intervalle de confiance (IC95) encadre toujours le prix théorique de Black–Scholes, preuve que les fluctuations statistiques ne biaisent pas l’estimation moyenne.

Enfin, les performances computationnelles ont été évaluées en mesurant le temps d’exécution du pricer Monte Carlo pour différentes tailles d’échantillon. Les résultats sont synthétisés dans le (Figure 10) ci-dessous. On observe une croissance quasi linéaire du temps de calcul avec , comme attendu pour une méthode purement itérative. Les écarts entre différentes seeds sont négligeables, confirmant que les variations aléatoires n’affectent pas la rapidité d’exécution.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Seed | Mc\_mean | Std\_hat | Err\_rel |
| 42 | 10.450170 | 0.147813 | 0.000040 |
| 123 | 10.575095 | 0.147601 | 0.011914 |
| 999 | 10.536830 | 0.149279 | 0.008253 |

Figure 10 : Stabilité du pricer Monte Carlo selon la graine aléatoire

Ces mesures montrent que la vectorisation du code (via NumPy) permet de maintenir un temps de calcul raisonnable, même pour des volumes élevés de simulations. Le modèle est donc à la fois robuste, cohérent et reproductible, respectant les propriétés théoriques du Monte Carlo tout en conservant une performance satisfaisante.

# Discussion

Les résultats obtenus dans les sections précédentes permettent de dresser une vision globale du comportement du modèle de pricing développé et de la fiabilité des deux approches testées : analytique (Black–Scholes) et numérique (Monte Carlo).

L’analyse des (Figure 1, Figure 2) confirme que la méthode de Monte Carlo reproduit avec précision le prix analytique lorsque le nombre de simulations est suffisamment élevé. La pente observée de −1/2 dans la relation entre l’erreur relative et le nombre de tirages valide le comportement théorique attendu de convergence en . Cette propriété garantit que le modèle est correctement implémenté et que l’estimateur du prix converge vers sa valeur vraie à mesure que la taille de l’échantillon augmente.

Cependant, les (Figure 3,Figure 4) mettent en évidence des zones de sensibilité où les erreurs augmentent : les configurations associées à une volatilité élevée () et à une maturité longue () présentent des intervalles de confiance plus larges et une variance accrue. Ces résultats traduisent une dispersion plus importante des trajectoires simulées, rendant la méthode Monte Carlo plus coûteuse pour atteindre un même niveau de précision. Ces effets sont particulièrement marqués lorsque le payoff dépend d’événements rares, comme dans le cas des options très OTM.

L’étude du moneyness (Figure 5) confirme cette tendance : les options at-the-money (ATM) offrent un compromis optimal entre stabilité numérique et pertinence économique. En revanche, les options ITM ou OTM affichent des biais plus marqués, soit parce que leur valeur est dominée par la composante déterministe du sous-jacent, soit parce que leur probabilité d’exercice devient trop faible. Ces écarts restent toutefois dans des marges acceptables pour des tailles d’échantillons supérieures à .

Les résultats liés aux Greeks (Figure 6, Figure 7, Figure 8) valident également la cohérence du modèle théorique. Les variations de Delta, Vega et Theta suivent les comportements attendus : Delta évolue monotoniquement avec le sous-jacent, Vega atteint un maximum à la monnaie, et Theta diminue avec le temps, reflétant la perte progressive de valeur temps. Ces observations renforcent la crédibilité du modèle et montrent qu’il reproduit fidèlement les sensibilités de marché essentielles à la couverture des portefeuilles d’options.

Malgré ces bonnes performances, le modèle présente plusieurs limites structurelles. L’hypothèse de volatilité constante constitue une simplification importante, qui ne reflète pas la variabilité observée sur les marchés réels. Le modèle ne prend pas non plus en compte la présence de sauts de prix, ni les phénomènes de volatilité stochastique, responsables de la formation du sourire de volatilité. De plus, la méthode Monte Carlo, bien que flexible, reste coûteuse en temps de calcul et peu efficace pour des échéances longues ou des scénarios extrêmes.

Pour dépasser ces limites, plusieurs pistes d’amélioration peuvent être envisagées. Les techniques de réduction de variance telles que les antithetic variates, les control variates, ou encore les méthodes quasi-Monte Carlo basées sur des séquences de Sobol + permettraient d’accélérer la convergence sans augmenter le nombre de simulations. Sur le plan de la modélisation, des extensions comme le modèle de Heston (volatilité stochastique) ou les modèles à sauts de Merton offriraient une représentation plus réaliste des dynamiques de marché et des distributions de rendements.

En résumé, les résultats démontrent l’efficacité et la cohérence du pricer Monte Carlo dans un cadre théorique simple, tout en soulignant les marges d’amélioration nécessaires pour une application réaliste en finance de marché. Le modèle constitue ainsi une base solide pour expérimenter des variantes plus avancées intégrant la volatilité stochastique et la réduction de variance, dans la perspective d’un pricing plus précis et plus performant.

# Conclusion

Ce projet a permis de concevoir et d’analyser un pipeline complet de pricing d’options européennes en comparant deux approches fondamentales : la solution analytique de Black–Scholes et la simulation numérique par Monte Carlo. Les résultats confirment que le pricer Monte Carlo, bien qu’approximatif, converge vers le prix théorique dès lors que le nombre de simulations est suffisant. Cette convergence suit la loi classique en , illustrant la validité statistique de la méthode et la robustesse de son implémentation.

L’ensemble des expériences menées a également montré que les Greeks calculés à partir du modèle de Black–Scholes présentent des comportements cohérents avec la théorie. Delta varie de manière monotone avec le sous-jacent, Vega atteint un maximum lorsque l’option est à la monnaie, et Theta diminue à mesure que la maturité approche. Ces résultats attestent de la capacité du modèle à reproduire correctement les sensibilités fondamentales du prix des options et à servir de référence pour l’analyse du risque et la couverture dynamique.

D’un point de vue pratique, les expériences suggèrent qu’un nombre d’environ simulations constitue un compromis efficace entre précision et coût de calcul dans la plupart des configurations standards. Au-delà, les gains de précision deviennent marginaux au regard du temps de calcul supplémentaire. En revanche, pour des options à maturité longue ou très volatiles, un contrôle plus rigoureux de la variance devient nécessaire. L’intégration de techniques de réduction de variance (telles que les variables antithétiques, les variates de contrôle ou les séquences quasi-aléatoires) permettrait d’améliorer la rapidité de convergence sans augmenter le volume de simulations.

En conclusion, le projet démontre la fiabilité et la pertinence du modèle de Monte Carlo comme méthode numérique de pricing, tout en mettant en lumière ses limites computationnelles et les leviers d’optimisation envisageables pour des applications plus complexes.

## Références

* Black, F. & Scholes, M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, 81(3), 637–654.
* Hull, J. C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives* (10ᵉ édition). Pearson Education.
* Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag, New York.